

导数概念的一点儿扩充

李学生

山东大学副教授, 中国管理科学院学术委员会特约研究员、北京相对论研究联谊会会员, 中国民主同盟盟员

xiandaiwulixue@21cn.com

摘要: 本文从数学美的角度把不定积分定义为一元函数的负一阶导数, 将 Jacobi 行列式定义为多元函数组的导数, 并指明了雅可比行列式的几何意义, 最后举例说明了其应用。[New York Science Journal. 2009;2(4):77-78]. (ISSN: 1554-0200).

关键词: 导数、扩充、数学美、Jacobi 行列式、不定积分

美学观念在自然科学的发展中起的作用是不可替代的。早在我国春秋时期, 庄子则有“原天地之美, 而达万物之理”的言句。而在古代西方, 毕达哥拉斯学派则把对自然奥秘的探索与对自然美的追求统一起来; 把数的和谐性作为科学解释的最高原则。自那时以来, 寻求自然界的美成为了推动自然科学发展的动力。十七世纪以后, 近代自然科学中兴起的经验主义思潮, 曾一度造成了科学与美学在某种意义上的分离。进入二十世纪以来, 以相对论和量子力学为代表的近代物理学革命的兴起却在更大的深度上推动了科学美学的发展。众多的物理学家从各自的科学创造实践中感受到物理理论的审美价值; 在美学原则的指引下, 他们作出了杰出的工作。美学因素不仅渗透到科学创造的原动力中, 而且也渗透到物理理论体系的构建与表述中。美学原则潜在地影响着科学成果的内容与形式; 人们甚至把美学价值的大小看做是评价一个科学理论成就大小的重要标准。一元函数的导数反映了函数对自变量的变化率, 在数学分析中有一些概念与导数不但存在着密切联系, 而且具有许多相似的性质。如果把它们也定义为导数, 就可以使数学知识之间具有一种和谐、对称的美感, 而且有助于进一步认识导数以及这些概念的本质。

(一) 不定积分定义为一元函数的负一阶导数

不定积分是求一个函数的原函数, 不定积分和导数互为逆运算, Newton——莱布尼兹公式搭起了微分学与积分学之间的一座重要的桥梁。不定积分与导数既然互为逆运算, 那么它们能否统一为一种运算呢? 数学中许多互逆的运算都可以统一为一种运算, 例如加法与减法、乘法与除法、乘方与开方, 因此笔者认为不定积分与导数既然互为逆运算, 应当可以统一为一种运算, 只需把不定积分定义为负一阶导数。

定义: 在区间 X 上给出函数 $f(x)$, 若存在 $F(x)$ 使得 $F'(x) = f(x)$, $x \in X$, 或 $dF(x) = f(x)dx$, $x \in X$, 则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个负一阶导数, $f(x)$ 的所有负一阶导数, 记作 $f^{(-1)}(x)$ 或 $\int f(x)dx$ 。

定理: 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个负一阶导数, 则 $f^{(-1)}(x) = F(x) + C$ 。 证明略。

一般情况, 函数 $f(x)$ 的 $-n+1$ 阶导数存在负一阶导数, 称之为函数 $f(x)$ 的 $-n$ 阶导数, 记为 $f^{(-n)}(x)$, 即 $(f^{(-n+1)}(x))^{(-1)} = f^{(-n)}(x)$ 。

根据定义可知, 一个函数 $f(x)$ 的负一阶导数即为它的不定积分, 依然可以用 $\int f(x)dx$ 表示, 而且还可以表示 n 次不定积分形式。在函数的各阶导数都存在的条件下, 导数的所有阶可以进行代数和运算, 即

$(f^{(-1)}(x))' = f(x)$, $(f^{(-1)}(x))^{(-1)} = f(x)$, $(f^{(-n)}(x))^{(n)} = f(x)$, ..., 这样定义以后, 把导数运算与积分运算统一起来, 而且可以看出数学知识之间具有一种和谐、对称和美感, 函数的导数的阶数定义

在整数集上。这样定义不仅仅是一种形式改变,而且可以对一些数学知识认识更加深刻,譬如微分方程与积分方程可以统一在一起,因为积分方程可以认为是负一阶微分方程,从而为寻找二者相似性与统一性搭起了一座桥梁。下面推导一下分部积分公式:

证明: $\because (uv)' = u'v + v'u, \therefore uv = (u'v)^{(-1)} + (v'u)^{(-1)}$.

$\therefore (u'v)^{(-1)} = uv - (v'u)^{(-1)}$, 即 $\int vdu = uv - \int u dv$.

这样计算方法的一切固定的差别都消失了,一切都可以用相反的形式表示出来。

(二)把 Jacobi 行列式定义为函数组的导数

多元函数只有偏导数,但是多元函数的 Jacobi 行列式与一元函数的导数存在着极其相似的特点,因此笔者从数学美的角度尝试着拓广导数概念,将 Jacobi 行列式定义为函数组的导数.这样定义之后,反函数组存在的判定定理与一元函数的反函数存在定理、Jacobi 行列式的锁链法则与一元函数的锁链法则、反函数组的 Jacobi 行列式与一元函数的反函数的求导公式、多重积分的变量替换公式与定积分的变量替换公式便一致起来。

一元函数的导数表示函数对自变量的变化率,可以认为是位移的变化率,可以假设二元函数组的 Jacobi 行列式表示一个坐标系到另一个坐标系的面矢的变化率,三元函数组的 Jacobi 行列式表示一个坐标系到另一个坐标系的体矢的变化率,……、

为了与一元函数定积分公式统一起来,笔者建议在多重积分的变量替换公式中的 Jacobi 行列式的绝对值符号去掉。至于物理问题与几何问题可以根据其意义决定是否保留绝对值符号,求数量时加绝对值符号,求向量时去掉绝对值符号。

2/24/2009