



对一道困扰力学界 50 多年习题的思考

李学生

(山东大学物理学院 山东济南 250100)

摘要: 首先证明了力的保守性具有伽利略变换的不变性, 保守力不可能变换成显含时间的力; 然后证明了圆周运动的向心力是保守力, 推出了在地面系和小车系自然摆动的单摆在摆动过程中机械能都守恒的结论, 验证了机械能守恒定律满足力学相对性原理, 解决了力学界 50 多年的困惑, 并对当前力学教材提出了几条修改建议.

[李学生. 对一道困扰力学界 50 多年习题的思考. *Academ Arena* 2022;14(5):16-24]. ISSN 1553-992X (print); ISSN 2158-771X(online). <http://www.sciencepub.net/academia>. 3. doi:10.7537/marsaaj140522.03.

关键词: 单摆; 动能; 势能; 保守力; 机械能守恒

Reflections on the Exercise of Over 50 Years Troubling the Mechanics Circle

Li Xuesheng

(School of Physics, Shandong University, Jinan, Shandong 250100)

Abstract: It is firstly proved that the conservativeness of force has the invariance of Galilean transformation. The conservative force can not be transformed into the force containing time; and then proved that the centripetal force of the circular motion is a conservative force. It is derived, in the ground and the car systems, the single pendulum of the natural swing in the swing process, its mechanical energy are conserved conclusions. It is proved that the law of conservation of mechanical energy satisfies the principle of relativity of mechanics, and solves the confusion of more than 50 years in the mechanics circle, and proposed a few changes to the current mechanics teaching materials.

[Li Xuesheng. **Reflections on the Exercise of Over 50 Years Troubling the Mechanics Circle.** *Academ Arena* 2022;14(5):13-21]. ISSN 1553-992X(print); ISSN 2158-771X(online). <http://www.sciencepub.net/academia>. 3. doi:10.7537/marsaaj140522.03.

Key words: the single pendulum; kinetic energy; potential energy; conservative force ;conservation of mechanical energy

中图分类号: O 313.1 文献标识码: A

文章编号:

引理 1 力的旋度等于 0, 环路积分为 0 和作用力 F 是某位势 Φ 的梯度三者是等价的.

设定 F 为在空间任意位置定义 (或空间内单连通的区域) 的矢量场, 假若它满足以下三个等价的条件中任意一个条件, 则可称此矢量场为保守矢量场:

① F 的旋度是零: $F \times \nabla = 0$;

② 假设粒子从某闭合路径 C 的某一位置, 经过这闭合路径 C , 又回到原先位置, 则力矢量 F 所做的机械功 W 等于零: $W = \int_C F \cdot dr = 0$;

③ 作用力 F 是某位势 Φ 的梯度: $F = -\nabla\Phi$.

① \square ②: 设定 C 为任意简单闭合路径, 即初始位置与终结位置相同、不自交的路径. 思考边界为 C 的任意曲面 S . 斯托克斯定理表明

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot da = \int_C F \cdot dr$$
. 假设 F 的旋度等于零, 方程左边为零, 则机械功 W 是零, 第二个条件是正确的.

② \square ③: 假设对于任意简单闭合路径 C , F 所做的随体功 W 是零, 则保守力所做于粒子的随体功,

独立于路径的选择. 设定函数 $\Phi(x) = -\int_o^x F \bullet dr$, 其中 x 和 o 分别是特定的初始位置和空间内任意位

置. 根据微积分基本定理, $F(X) = -\nabla\Phi(x)$. 所以第三个条件是正确的.

③□①: 假设第三个条件是正确的. 思考下述方程:

$$\nabla \times F = -\nabla \times \nabla\Phi = -\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\right)\hat{y} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}\right)\hat{z} = 0$$

所以第一个条件是正确的. 因此这三个条件彼此等价. 由于符合第二个条件就等于通过保守力的闭合路径要求, 所以只要满足上述三个条件的任何一条件, 施加于粒子的作用力就是保守力. 如果作用在物体的力所做之功仅与力作用点的起始位置和终了位置有关, 而与其作用点经过的路径无关, 即不仅力有势, 且在相应的势能表达式中不显含时间, 该力则为保守力. 势能定义为 $dE_p = -f \cdot dr$, 势能是位置的函数, 环路积分必等于 0.

由于旋度具有伽利略变换的不变性, 因此力的保守性也具有伽利略变换的不变性. 下面给出证明

引理 2 力的保守性具有伽利略变换的不变性.

在两个相对匀速运动的惯性系 o, O_1 中, 如果 o 系中力 f 是保守力, 那么在 O_1 系中该力 F 也是保守力.

证明: 设 0 时刻惯性系 o, O_1 完全重合, 且 O_1 系相对于 o 系以正常数 u 的匀速开始运动. 设 t 时刻, 质量为 m 的质点在惯性系 o 的位矢、速度、加速度、受的力、做的功中分别为: r, v, a, f, w , 在 O_1 系中分别为: R, V, A, F, W , 则据微分运算有

$$R = r + ut, \quad V = v + u, \quad A = a, \quad F = f; \\ dR = V dt, \quad dV = u dt, \quad dR = dr + u dt.$$

$$dW = F \cdot dR = f \cdot (dr + u dt) = f \cdot dr + u \cdot f dt = dw + mu \cdot dv = md(u \cdot v), \quad (1)$$

$$\int_0^W dW = \int_0^w dw + \int_{u \cdot v_0}^{u \cdot v} m d(u \cdot v), \quad W = w + mu \cdot v - mu \cdot v_0. \quad (2)$$

由 $dv = a dt$ 和 $dr = v dt$ 知, $W = w + mu \cdot v - mu \cdot v_0 = w_1(t) + mu \cdot q(t) - mu \cdot v_0 = j(t)$,

由于 $R = r + ut = r(t) + ut = \varphi(t)$ 是关于时间 t 的连续函数, 质点在任何时刻的速度都是唯一存在的, 因此 $R = \varphi(t)$ 也是可导函数, 如果该函数出现常值函数区间, 质点静止, 受到的力是 0, 不是显含时间的力, 下面不研究这个区间, 去掉该常值函数区间, 该函数的极值点可以把它划分为若干个单调区间, 设 D 是该函数的任意一个单调区间, 根据反函数的定义在该区间上存在反函数 $t = \varphi^{-1}(R)$, 在区间 D 上 $W = j(t) = j_1(R)$ 是位置的函数, 对时间的偏导数等于 0, F 是保守力. 由于在任意单调区间上成立, 所以该结论在任何位置都成立, $F = ma = mf$ 是 O_1 系中的保守力. 力是伽利略变换的不变量, 不但包括力的大小和方向, 而且力的保守性也具有伽利略变换的不变性.

力的保守性具有伽利略变换的不变性, 有时表达式中含有时间 t , 但是通过伽利略变换可以消去, 对时间的偏导数等于 0, 此时不是显含时间的力, 是

隐含时间的一元函数, 纠正某些文献和力学教材中错误的表述.

显含时间力场的定义: 对于力 $F = F(r, t)$, 如果时间 t 不能通过恒等变换消去, 只能表示为位置和时间的二元函数, 或者说力 F 对于时间的偏导数不恒等于 0, 那么力 F 就是一个显含时间的力场或者说是一个不稳定场.

根据 $dE_p = (-f) \cdot dr$ 与 $F = \partial u / \partial r$ 可以得知力显含时间的充要条件为势能显含时间, 因此在保守力场计算势能不可能显含时间.

引理 3 圆周运动的向心力是一个保守力.

证明: 如图 1, 质量为 m 的钢球 (视为质点), 在长为 R 的轻绳的牵制下, 在光滑水平地面上绕地面上的 o 点做圆周运动, 有一小车相对于地面以匀速 u 沿光滑水平地面运动, 忽略摩擦和空气等各种阻力.

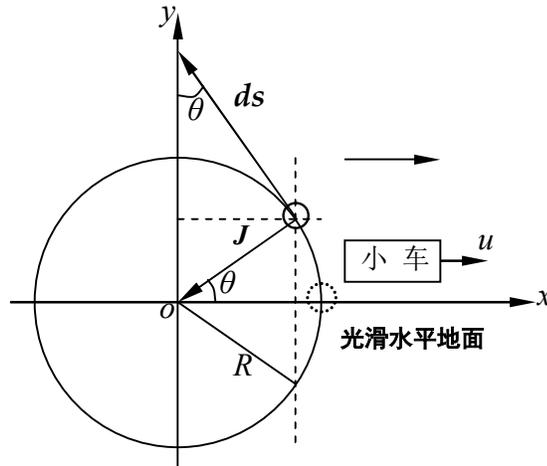


图1 圆周运动物体

在地面系，建立平面直角坐标系如图 1 所示。由于向心力和位移始终垂直，有：

$$\int_0^s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^s J \cos \frac{\pi}{2} ds = \int_0^s 0 ds = 0.$$

无论运动多少周，当钢球回到出发点时，向心力的功始终等于 0，根据保守力的定义可知圆周运动物体受到的向心力是保守力。根据引理 2，在小车系向心力也是一个保守力。因此对于任何惯性系，圆周运动的物体受到的向心力都是一个保守力。同理可以证明斜面的支持力等各种光滑约束中约束力

在所有惯性系也是保守力。

将摆锤质量为 m ，轻质摆线（摆线质量视为 0）长度为 L 的单摆挂在与地面相固连的摆架上，将摆锤从单摆静止时的竖直下垂位置拉至摆角为 θ_0 ($\theta_0 \in [0^\circ, 90^\circ]$) 时自然放手，在忽略各种阻尼时，单摆就做自然摆动， θ_0 为最大摆角。有一小车在地面（地球质量视为充分大，稳定地保持为惯性系）上以正常数 u 向右运动。

求证：在地面系和小车系上观察，单摆的机械能都守恒。

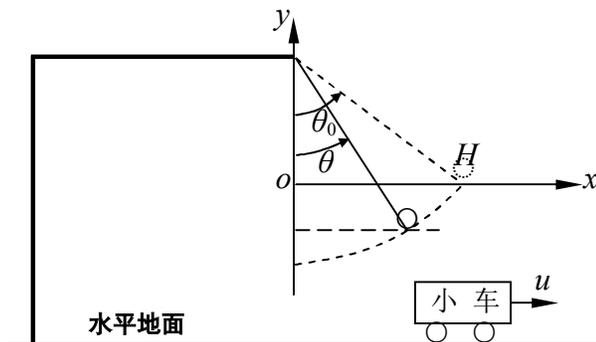


图2 自然摆动单摆机械能问题

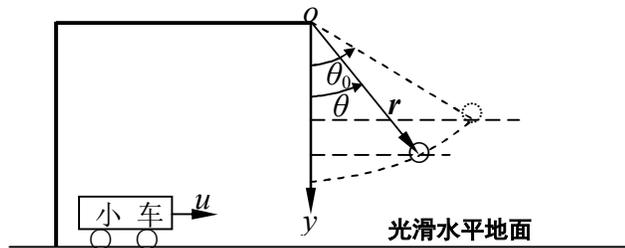


图3 自然摆动单摆机械能守恒问题新解

解：由于假定地球质量充分大，忽略其能量的变化，只能按照外场计算，此时一个保守力的功等于质点势能的减少。根据引理 1~3，无论是地面系，还是小车系摆线的拉力都是一个保守力。

在地面系，建立平面直角坐标系如图 2 所示。由于在摆动过程中摆线的拉力和重力在该直线上的分力与位移垂直不做功，因此只需考虑重力在切线方向的分力。单摆在 $t=0$ 时刻从最大摆角 θ_0 开始摆动（规定初始时刻的势能为 0），在 t 时刻的摆角、速度大小、切向加速度大小、动能、势能、机械能分别为： $\theta, v, a, E_k(t), E_p(t), E(t)$ ；在小车系，单摆 t 时刻的速度大小、切向加速度大小、动能、势能、机械能分别为： $v_1, a_1, E_{1k}(t), E_{1p}(t), E_1(t)$ 。则

在**地面系**：**在地面上观察**时，以单摆的悬挂点 o 为极点，单摆静止时与摆线重合的射线 oy 为极轴，从 o 到摆锤的矢量 r 为极径，极轴和极径的夹角 θ 为极角建立平面极坐标系如图 3 所示。

设在**地面上观察**时，单摆在 $t=0$ 时刻从最大摆角 θ_0 ($\theta_0 \in (0^0, 90^0]$) 开始摆动(规定初始时刻的势能为 0)， t 时刻的摆角、速度大小、切向加速度大小、动能、势能、机械能分别为： $\theta, v, a, E_k(t), E_p(t), E(t)$ ；在**小车上观察**时，单摆在 t 时刻的摆角、速度大小、动能、势能、机械能分别为： $\theta_1, v_1, E_{1k}(t), E_{1p}(t), E_1(t)$ ；**在地面上和小车上观察时，都设摆锤的最高点为零势点**。则有：

$$v \frac{ds}{dt} = \frac{d[L(\theta_0 - \theta)]}{dt} = \frac{-Ld\theta}{dt}$$

$$mgsin\theta = ma, \quad gsin\theta = a \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{-Ld\theta} = \frac{-Ld\theta}{-Ld\theta} \quad v, \quad vdv = gLsin\theta d\theta,$$

$$\int_0^v v dv = gL \int_{\theta_0}^{\theta} sin\theta d\theta, \quad \frac{1}{2} v^2 = gL(\cos\theta - \cos\theta_0). \quad v = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}.$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{-L} = \frac{1}{L} \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$\sqrt{2 \frac{g}{L} (\cos\theta - \cos\theta_0)} = \sqrt{2 \frac{g}{L} \cos\theta - 2 \frac{g}{L} \cos\theta_0} <$$

所以对于一个确定的单摆而言，只要初始状态确定，单摆的摆角是时间 t 的单值函数，因

此我们只需证明任意摆角的机械能相等即可，在本题中是减函数。

$$E_k(t) = E_k'(\theta) = \frac{1}{2} mv^2 = mgL(\cos\theta - \cos\theta_0);$$

$$E_p(t) = E_p'(\theta) = mgy = mg(L\cos\theta_0 - L\cos\theta) = 0 - mgL(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

$$E(t) = E_k(t) + E_p(t) = E_k'(\theta) + E_p'(\theta) = mgL(\cos\theta - \cos\theta_0) - mgL(\cos\theta - \cos\theta_0) = 0.$$

所以**在地面系**单摆的机械能守恒，守恒值为 0。

在**小车系**：

直觉判断：

因为摆锤在最高点以匀速度 u 相对于小车沿 x 轴负向运动，我们规定此时势能为 0，所以在**小车上观察**时，摆锤的机械能比在**在地面上观察**时增加 $\frac{1}{2} m(u)^2 = \frac{1}{2} mu^2$ ，所以在**小车上观察**时，摆锤的机械能为：

$$E_1(\theta) = E(\theta) + \frac{1}{2} mu^2 = 0 + \frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} mu^2 \text{ (常数).}$$

所以在**小车上观察**时，单摆的机械能守恒，守恒值为 $\frac{1}{2} mu^2$ 。

数学推导：在地面系——设初相为 0， $v=\omega R$ ，
 $\begin{cases} x=R\cos\omega t \\ y=R\sin\omega t \end{cases}$
 将运动方程作伽利略变换，写出小车系运动方

程:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x - ut = R \cos \omega t - ut \\ y_1 = y = R \sin \omega t \end{array} \right.$$

$$v_{1x} = v_x - u = v \cos \theta - u, \quad v_{1y} = v_y = v \sin \theta.$$

$$v_1^2 = v_x^2 + v_y^2 = (v \cos \theta - u)^2 + v^2 \sin^2 \theta = v^2 - 2u v \cos \theta + u^2.$$

$$2gL(\cos \theta - \cos \theta_0) = u^2 - 2u \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)} \cos \theta.$$

$$E_{1k}(t) = E_{1k}'(\theta) = \frac{1}{2} m v_1^2 = mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) + \frac{1}{2} m u^2 - m u \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)} \cos \theta.$$

$$a_{1x} = \frac{dv_{1x}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} = 0 = a_x; \quad a_{1y} = \frac{dv_{1y}}{dt} = \frac{dv_y}{dt} = a_y = a = g \sin \theta.$$

$$m a_{1x} = m a_x = 0; \quad m a_{1y} = m a_y = m a = m g \sin \theta.$$

$$0 = E_{1p}(t) = E_{1p}'(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} m a_1 ds = \int_{\theta_0}^{\theta} \left(-m a_1 \cos \theta - m \frac{v^2}{L} \sin \theta \right) (-u) d\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta} m g \sin \theta (L d\theta) - m u \int_{\theta_0}^{\theta} \left(g \sin \theta \cos \theta + \frac{v^2}{L} \sin \theta \right) \frac{-L d\theta}{v}$$

$$= mgL \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta - m u L \int_{\theta_0}^{\theta} \left(g \cos \theta + \frac{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)}{L} \right) \frac{d \cos \theta}{v}$$

$$= mgL \cos \theta \Big|_{\theta_0}^{\theta} - m u g L \int_{\theta_0}^{\theta} (\cos \theta + 2 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) \frac{d \cos \theta}{\sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

$$= mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) - \frac{3m u g L}{\sqrt{2gL}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta - \cos \theta_0 + \cos \theta_0 - \frac{2}{3} \cos \theta_0}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$$= mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) - \frac{3m u g L}{\sqrt{2gL}} \frac{2}{3} (\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}} - \frac{m u g L}{\sqrt{2gL}} (\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{1}{2}} \cos \theta_0$$

$$= mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) - m u \sqrt{2gL} (\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{3}{2}} - m u \sqrt{2gL} (\cos \theta - \cos \theta_0)^{\frac{1}{2}} \cos \theta_0$$

$$= mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) - m u \sqrt{2gL} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} (\cos \theta - \cos \theta_0 \cos \theta_0)$$

$$= mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) - m u \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)} \cos \theta.$$

$$E_{1p}(t) = E_{1p}'(\theta) = mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) - m u \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)} \cos \theta.$$

$$E_1(t) = E_{1k}(t) + E_{1p}(t) = E_{1k}'(\theta) + E_{1p}'(\theta) =$$

$$mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) + \frac{1}{2} m u^2 - m u \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)} \cos \theta$$

$$= mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) - m u \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)} \cos \theta + \frac{1}{2} m u^2$$

常数.

所以在**小车系**单摆的机械能也守恒, 守恒值为 $\frac{1}{2}mu^2$. 当 $u=0$ 时两个坐标系重合, 守恒值相等, 符合对应原理的要求. 若 $u \neq 0$ 时, 由于在单摆问题摆角比较小, $\cos \theta \neq 0$, 因此当且仅当 $\cos \theta = \cos \theta_0$ 时势能相等.

从分析力学的角度看动能 $T = mgL(\cos \theta - \cos \theta_0) + \frac{1}{2}mu^2$, 势能 $V = -mgL(\cos \theta - \cos \theta_0)$, 机械能为 $\frac{1}{2}mu^2$. 动能和势能与矢量力学不同, 但是机械能相同.

另证: 由于本题假定地球质量充分大, 忽略地球能量的变化, 只能按照外场计算, 此时一个保守力的功等于质点势能的减少.

设与单摆还未摆动而自然下垂位置重合的竖直线与水平地面的交点 O 为**地面系**的原点, 点 o 为**小车系**的原点. 设 0 时刻 o 与 O 完全重合, 单摆从摆角 θ_0 开始摆动. 设在 t 时刻, 摆锤与小车 o 的位置如图 1 所示; 摆锤在**小车系**的位矢、速度、加速度、据伽利略变换或图 4 知:

$$\begin{aligned} R &= r + ut, \quad V = v + u, \quad A = a + 0, \quad F = mA = ma + f. \\ v^2 &= V^2 - 2v \cdot u + u^2 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mu \cdot v + \frac{1}{2}mu^2, \quad E_k = e_k + mu \cdot v + C,$$

$$dE_k = de_k + mu \cdot dv + dC = de_k + u \cdot m \frac{dv}{dt} dt = de_k + f \cdot u dt.$$

$$dE_p = F \cdot dR = f \cdot d(r + ut) = f \cdot dr + f \cdot d(ut) = de_p + f \cdot u dt.$$

$$dE_k + dE_p = de_k + f \cdot u dt + de_p + f \cdot u dt = de_k + de_p + d(e_k + e_p) = d(E_k + E_p) = de = dE = 0.$$

所以, 在**小车系**观察时, **摆锤的机械能**守恒.

设在 $t=0$ 时刻摆锤位于最高点, 此时为地面系和小车系的公共势能 0 点, 则:

$$E_k(0) = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = 0, \quad E_p(0) = 0, \quad E(t) = E_k(t) + E_p(t) = E_k(0) + E_p(0) = 0 + 0 = 0.$$

$$e_k(0) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-u)^2 = \frac{1}{2}mu^2, \quad e_p(0) = 0, \quad e(t) = e_k(t) + e_p(t) = e_k(0) + e_p(0) = \frac{1}{2}mu^2 + 0 = \frac{1}{2}mu^2.$$

说明: 1. 摆线的约束力是一个保守力, 在小车系做功同时改变摆锤的动能和势能, 不改变摆锤的机械能, 与直接计算重力机械能得出的结果一致. 建议教材明确指明——**光滑约束中的约束力是一个保守力**, 不要认为力学中的保守力只有弹簧弹力、万有引力和重力, 把约束力当成外力, 在一个惯性系

受的力、动能、势能、机械能分别为:

$$r, v, a, f, e_k, e_p, e;$$

在**地面系**的位矢、速度、加速度、受的力、动能、势能、机械能分别为: R, V, A, F, E_k, E_p, E . 则在**地面系**观察时, 在**地面单摆体系**中, 因为**摆锤**仅受到**重力**和**拉力**的作用, 拉力与位移始终垂直不做功, **摆锤的机械能** E 守恒, 即 $E = D$ 常数, 亦即 $dE = dD = 0$.

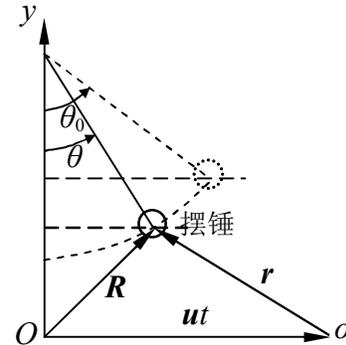


图 4 自由摆动单摆机械能在各惯性系都成立

里不做功, 在另一个惯性系里做功, 这样机械能守恒定律就不满足力学相对性原理了, 参见文献[1~15]. 这个习题自从文献[4~5]提出以来, 力学界讨论 50 多年一直未能定论, 原因之一在于没有认识到约束力也是一个保守力, 文献[16]早就提出了约束力是一个保守力的问题. **流体力学中推导伯努利方程时**

曾经利用了理想流体的压力是保守力。

2. 在上面的单摆问题中势能包括重力势能, 不是严格意义上的重力势能, 因为质点受到的合力不等于重力. 在本题中摆线的拉力是一个保守力, 因此本题是两个保守力共同作用下的机械能守恒问题, 摆锤的重力势能+摆锤的拉力势能+摆锤的动能=摆锤机械能的守恒量, 在地面系摆锤的拉力势能始终不变, 可以认为是 0, 就成为重力机械能守恒的问题. 在这个问题中, 在小车系看来可以认为是重力机械能不守恒, 不能认为是机械能不守恒. 在这个问题中如果按照重力机械能计算是开放系统, 按照机械能计算是孤立系统. 单摆问题是一个完整、理想、双侧束的质点, 约束力不改变质点的机械能; 考虑摆线质量, 是具有完整、理想、双侧束的质点系, 约束力也不改变系统的机械能.

当观察者相对于单摆静止时, 利用重力机械能守恒定律得出的结果等效; 当观察者相对于单摆的悬挂点匀速运动时, 直接利用重力机械能守恒定律是错误的, 应该利用保守力所做的功等于势能的减少来计算. 在小车系看来, 摆线的作用力并不始终与位移垂直, 摆线的作用力也做功, 同时改变了摆锤的动能和势能, 不改变摆锤的机械能, 机械能守恒定律中的保守力应该是保守力的合力, 考虑了势能就不能再计算保守力的功了, 本题中如果按照重力机械能计算显然不满足力学相对性原理, 参见文献[1~15].

3. 有的力学教材中有这样一个实例——在一个相对于地面匀速上升的电梯底部静止放置一个物体(视为质点), 在电梯内的观察者看来, 没有任何力对质点做功, 动能和势能(取电梯的底部为势能零点)均为 0, 机械能守恒; 在地面的观察者看来, 电梯底部对于质点的支持力做功, 动能不变, 势能不断增加(取地面为势能零点), 机械能不守恒. 其实这种分析是错误的, 在地面系看来电梯的支持力也是一个保守力(很容易证明当电梯上升和下降相同的高度时, 支持力做功之和为 0, 满足保守力定义), 重力势能增加量等于支持力势能减少量, 质点受到的合力为 0, 总势能不变, 动能也不变, 因而机械能守恒, 机械能守恒定律满足伽利略变换. 重力机械能不守恒, 不代表机械能(力学能)不守恒. 有些分析力学教材认为光滑约束中的约束反力与实位移垂直, 约束反力不做功, 这是不完善的, 因为约束反力在一个惯性系里不做功, 在另一个惯性系里可能做功, 完整的表述应该为——光滑约束中的约束反力不改变质点的机械能, 这样就适用于所有的惯性系了. 在分析力学中可以认为是重力机械能问题. 直线匀加速度参考坐标系和匀角速度定轴转动参考坐标系, 其惯性力为保守力, 可以证明此时在非惯性系里光滑约束中的约束反力也不改变质点

的机械能.

4. 机械能守恒定律是牛顿定律的推论, 牛顿第二定律中的力是指质点受到的合力, 因此机械能守恒定律中的保守力应该是指保守力的合力, 因此本题不是重力机械能问题. 在这个问题中如果按照重力机械能计算是开放系统, 按照机械能计算是孤立系统.

5. 按照外场(外势能)计算, 势能属于质点, 一个保守力的功等于势能的减少, 势能是坐标的函数, 势能不是伽利略变换的不变量; 按照内场计算, 势能属于系统, 一对保守力的功等于势能的减少, 势能是相对位置的函数, 势能是伽利略变换的不变量. 二者有着本质的区别, 量变引起质变, 建议力学教材明确指出. 本题中地球和摆锤的质量相差极其悬殊, 按照内场(内势能)计算, 不具有可操作性, 此时地面系不再是惯性系, 机械能也不守恒.

6. 机械能守恒定律成立的条件就是质点只受到保守力, 对于同一个物理过程, 在一个惯性系里能量守恒, 在另一个惯性系里能量也一定守恒, 如果只有保守力则为机械能, 改变目前各种力学教材与文献的多种表述, 这样经典力学的理论就更加和谐对称. 证明: 根据动能定理, 设质点只受到保守力的作用, 质点从 B 点到 A 点的过程中保守力合力的功为 W , $W = E_{k1} - E_{k0}$, E_{k1} 是 A 点的动能, E_{k0} 是 B 点的动能. 根据势能定义, $W = E_{p0} - E_{p1}$, E_{p1} 是 A 点的势能, E_{p0} 是 B 点的势能. 所以 $E_{k1} - E_{p1} = E_{k0} - E_{p0}$.

7. 地面系和小车系在起始时刻的势能零点重合, 任何时刻小车系势能零点是地面系势能零点的伽利略像点, 这是相对性原理的要求. 斜面问题与单摆处理方法相似, 斜面的支持力也是一个保守力^[17], 这个问题在国际上也比较纠结^[18]. 文献[19]证明了弹簧振子机械能在所有的惯性系机械能都守恒, 文献[20]自由落体运动机械能在所有的惯性系机械能都守恒, 文献[21]万有引力机械能在所有的惯性系机械能都守恒, 文献[22]证明了能量守恒定律和动量守恒定律在牛顿力学和狭义相对论中都具有协变性, 文献[23]利用内势能计算斜面问题此时地面系和小车系都是非惯性系, 需要考虑惯性力做功的问题.

8. 在本文中摆锤受到摆线的作用力是弹力, 约束力势能是弹性势能, 但是没有弹性形变, 建议教材把弹性势能定义为质点受到保守力弹力的作用而具有的能, 把弹性形变的要求去掉. 由于质点受到万有引力而具有的势能叫引力势能, 由于质点受到重力而具有的势能叫重力势能, 而把弹性势能定义为由于弹性形变具有的势能不具有和谐性, 因为弹簧振子中质点具有弹性势能而没有形变. 赵凯华认为: “研究一个规律的表述所具有的对称性, 并设法消除某种不对称因素, 从而使其规律的表述具有更多的对称性, 这无疑是有重要意义的. 因为它不仅满足人

类对于美（对称，和谐）的心理追求，而且更重要的是使表述的规律具有更大的普遍性。如果把弹性势能定义为由于质点受到保守弹力作用（并非所有弹力都是保守力，例如非弹性碰撞中的弹力）而具有的势能叫做弹性势能就比较完整了，不但包括弹簧振子中的弹性势能[19]，也包括具有质量的弹簧、弹弓、弓箭等弹性势能，甚至包括光滑斜面上的滑块受到的弹力——支持力等具有的弹性势能[17]和单摆的摆锤受到摆线的约束力具有的势能等。质点只要受到弹力作用就具有弹性势能，不一定发生弹性形变，例如小滑块在光滑斜面上下滑，斜面的形变为0，质点依然具有弹性势能[17]。有人说没有形变哪来的弹力，确实这样，一个物体放在水平地面上受到支持力是弹力，但是我们不必考虑形变，力学中不必考虑力的性质的来源，重力来源于万有引力，摩擦力还来自于电磁力呢？我们计算摩擦力时从来不考虑电磁力的问题，研究质点的重力时也不考虑万有引力。对于普通的力学实验，我们一般选地面系作为惯性系，此时忽略地球能量的变化，地球已经不再是研究对象。

9. 文献[24]认为机械能的哈密顿量是位置坐标的函数，在进行该位置坐标上的坐标变换时总会携带时间，导致其哈密顿量对时间的偏导数不为0，是完全错误的，通过上面的分析可以看出时间t完全可以消去，其哈密顿量对时间的偏导数始终为0。

10. 当小车相对于地面变速运动时，此时重锤受到一个惯性力，由于惯性力也是一个保守力，因此在小车系测量的机械能依然是守恒的。

文献[25]分析了惯性力的性质，证明了惯性力是保守力，根据爱因斯坦的观点：惯性力等价于引力场，因此也是保守力。或者假设爱因斯坦的广义相对性原理成立，那么能量守恒定律在所有参照系成立，只要一个物理过程在惯性系能量守恒，在非惯性系也一定守恒，也可以证明惯性力是保守力。文献[26]说明对于惯性力是否是保守力，需要单独证明，下面给出一个数学证明，证明惯性力一定不是显含时间的力。

证明：假设质点在惯性系的加速度为 a_1 ，惯性加速度为 a_2 ，此时对于质点 $dv/dt = a_1 + a_2 = a(t)$ ，所以质点的速度是时间t的函数 $v=f(t)$ ， $ds/dt=f(t)$ ，位移也是时间t的函数 $s=\varphi(t)$ ，是关于时间t的连续函数，质点在任何时刻的速度都是唯一存在的，因此 $s = \varphi(t)$ 也是可导函数，如果该函数出现常值函数区间，质点静止，受到的力是0，不是显含时间的力，下面不研究这个区间，去掉该常值函数区间，该函数的极值点可以把它划分为若干个单调区间，设D是该函数的任意一个单调区间，根据反函数的定义在该区间上存在反函数 $t=\varphi^{-1}(s)$ ，这样 $a=a(\varphi^{-1}(s))$ ，惯性力

$F=ma(\varphi^{-1}(s))$ 与时间t无关，不是显含时间的力，也不是耗散力，是一个保守力。只有力的大小是位移和时间的二元函数，并且时间t不能被消元的话，才是显含时间的力。文献[27]列举的实例也可以消去时间t，不是显含时间的力。

文献[28]也证明了惯性离心力也是一个保守力，

给出了离心力势能公式 $E_p = \frac{I^2}{2mr^2} = I = m\theta r^2$ ，文献

[29~32]证明了直线匀加速度参考坐标系和匀角速度定轴转动参考坐标系，其惯性力为保守力，对于直线非匀加速度参考坐标系和非匀角速度定轴转动参考坐标系，其惯性力显含时间为非保守力是错误的，此时是隐含时间的力，通过变换可以消去时间t，此时惯性力也是保守力。文献[33]认为除了牵连带惯性力是非保守力，其他惯性力是保守力，也是同样的错误。文献[34]证明了非匀角速度定轴转动参考坐标系机械能守恒定律也成立，即此时惯性力也是保守力。其实对于直线非匀加速度参考坐标系惯性力也是一个保守力，例如假设在一部变加速上升（加速度 $a=a(t)$ ）的电梯内观察一个自由降落的质点，质点受到重力和一个惯性力，惯性力的大小是时间t的函数，如果惯性力是显含时间的力——非保守力，会观测到质点的机械能不守恒，能量来自哪里呢？

科学发展的历史表明，一个成功的理论是来源于科学实验和科学观测，随着观测事实的累积，一方面使理论得到更广泛的证实，另一方面必然会暴露出理论的局限性，从而迫使理论朝着更深刻和更普遍的方向发展。所谓更普遍就是要求新理论能概括更多的观测事实，从而扩大了理论的适用范围，但在旧理论的适用条件下，必然能返回到旧理论所能描述的全部特征，这也是衡量一个理论正确与否的重要判据之一。

致谢：

本文曾得到两弹元勋、国家自然科学基金一等奖获得者、中国科学院三等奖获得者、中国科学院力学研究所吴中祥研究员和中国科学院资深院士、美国杜邦公司中心研究院院士沈致远的悉心指导，借此深表感谢！

参考文献：

- [1]. 蔡伯谦. 关于力学相对性原理与机械能守恒综述[J]. 大学物理, 1994, (13)1: 20~22.
- [2]. 何红雨. 机械能守恒定律与惯性参照系的选择[J]. 广西物理, 1997, (18)3: 27~29.
- [3]. 金若兴. 机械能守恒定律的条件. 物理教学, 1985年1月.
- [4]. 熊秉衡. 在不同惯性系中的机械能守恒定律. 物理通报, 1964 (6): 261~264.

- [5]. 熊秉衡.“在不同惯性系中的机械能守恒定律”一文的更正与补充.物理通报, 1965 (3): 116~117.
- [6]. 施肖铮.在不同惯性系中的机械能守恒定律.常州信息职业学院学报, 2002年12月, 第1卷第2期.
- [7]. 丘基瑶.机械能守恒定律与惯性参考系的变换.佛山科学技术学院学报(社会科学版), 1983 (00) .
- [8]. 王开放.机械能守恒定律的条件.开封教育学院学报, 2003, 23 (4): 38~39.
- [9]. 刘瑞金.有关机械能及其守恒律的研究评述.淄博师专学报, 1995 (12): 22~26.
- [10]. 易双萍.不同惯性系中的力学规律.工科物理(现名:物理与工程), 1998年第8卷第5期: 18~22.
- [11]. 赵坚.机械能守恒定律理解中一个值得重视的问题[J].物理通报, 2006, (25)6: 19~21.
- [12]. 钱广东.不同惯性系中机械能不一定都守恒——兼谈机械能守恒定律是否服从力学相对性原理[J].物理教学, 2006, (28)2: 42~43.
- [13]. 白静江.两体问题中的功能原理及机械能守恒定律[J].大学物理, 1997, (16)3: 11~14.
- [14]. 孙国标, 杨丽芬.也谈机械能守恒的相对性[J].物理教师, 2006, (27)12: 32~33.
- [15]. 李伟铎.对“重力机械能守恒定律在各惯性系都成立”的商榷.物理通报(增刊1), 2016 (5): 110~112, 115.
- [16]. 马忠义.物体在约束运动中的功和能.沈阳化工学院学报, 1989 (3) 2: 117~122.
- [17]. 张翠.斜面上下滑滑块机械能守恒问题新解.物理通报, 2016(9): 115~117.
- [18]. Santos FC, Soares V and Tort AC. A note on the conservation of mechanical energy and the Galilean principle of relativity[J]. European Journal of Physics. 2010 , 31(4):827~834.
- [19]. 李学生, 师教民.对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷[J].物理通报, 2014(9): 119~120.
- [20]. 赵文桐, 刘文芳, 刘明成.重力机械能守恒定律在各惯性系都成立[J].物理通报, 2015(3): 96~98.
- [21]. 刘明成, 赵文桐, 刘文芳.引力机械能守恒定律在各惯性系都成立[J].物理通报, 2015(6): 123~124.
- [22]. 李子军, 李根全, 白旭芳.牛顿力学形式和相对论力学的协变性.大学物理, 第21卷第6期, 2002 (60) :22~23, 39.
- [23]. 王志成, 康旭红, 王增发.不同惯性参考系中系统机械能是否守恒的再讨论——兼谈机械能守恒定律满足伽利略相对性原理.物理教师, 2019 (8): 60~62, 64.
- [24]. 杨习志, 赵坚.关于机械能守恒定律是否满足相对性原理的探讨.物理教师, 第41卷第5期, 2020 (5): 65~67,72.
- [25]. 徐满平.惯性力的性质研究.池州师专学报, 第14卷第3期, 2000年8月: 21~25.
- [26]. 李子军.关于非惯性系机械能守恒问题的一点讨论.大学物理, 1992 (6): 41.
- [27]. 张建忠.对机械能守恒条件的讨论[J].集宁师专学报, 2006, 28 (4): 68~69.
- [28]. 刘力.保守力场中圆运动的稳定性.济宁师范专科学校学报, 第23卷第6期, 2002(12): 21~22.
- [29]. 吕宗禄.惯性力场和保守力场的等效性及其应用.工科物理增刊, 2000:249~254.
- [30]. 侯如松.惯性力是保守力吗.大学物理, 1989 (11): 47, 27.
- [31]. 徐水源.惯性力为保守力的物理条件.常石教育学院学报, 2005 (3): 63~65.
- [32]. 房晓勇.动力学基本守恒定律在非惯性系的表述.纺织高校基础科学学报, 第8卷第1期, 1995 (3): 100~103, 111.
- [33]. 殷保祥.对非惯性系动力学方程的讨论.丝路学坛, 1998年第2期, 19~21.
- [34]. 吴森.要求角速度一定为常矢量吗?——非惯性系机械能守恒定律的一个特例.五邑大学学报(自然科学版), 第9卷第2期, 1995: 45~49.

1/22/2022