

引力场中的高斯定理

李学生 (Li Xuesheng)
1922538071@qq.com

Abstract: 万有引力和库仑力都是平方反比力, 质点 (或点电荷) 在平方反比力作用下的运动轨迹是圆锥曲线。质点 (或点电荷) 的运动轨迹到底是圆锥曲线中的椭圆、抛物线, 还是双曲线, 则是由如下表所示的质点 (或点电荷) 所具有的总能量决定。

[李学生. 引力场中的高斯定理. *Academ Arena* 2014;6(8):66-67]. (ISSN 1553-992X).
<http://www.sciencepub.net/academia.8>

Keywords: 万有引力; 库仑力; 平方; 反比力; 质点; 点电荷; 运动轨迹; 圆锥曲线; 能量

万有引力和库仑力都是平方反比力, 质点 (或点电荷) 在平方反比力作用下的运动轨迹是圆锥曲线。质点 (或点电荷) 的运动轨迹到底是圆锥曲线中的椭圆、抛物线, 还是双曲线, 则是由如下表所示的质点 (或点电荷) 所具有的总能量决定的:

总能量	负 (引力)	零 (引力)	正 (斥力或引力)
离心率	<1	1	>1
轨道	椭圆	抛物线	双曲线

引力和静电力都是有势力, 相应的引力势和静电势都满足三维空间里最简单的二阶 (偏微分) 方程——拉普拉斯方程. 用 ψ 代表引力势或者静电势场, 它在三维空间里所满足的拉普拉斯方程采取如下的形式: $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2) \psi(x, y, z) = 0$. 由于相应的静电力和引力等于势的微分 (的负值), 它的大小便与半径 r 成反比了, 即 $\psi(r) \propto 1/r$, $F(r) = -d\psi/dr \propto 1/r^2$ 由于万有引力定律与 Coulomb's law 本质是一样的, 因此引力场中也存在高斯定理, 并且与万有引力定律等价。

一、预备知识

引力场场强: 引力场场强是一个向量, 其大小等于 1 千克的质点在该处所受引力的大小, 方向与该质点在该处所受引力的方向一致。

引力线: 如果在引力场中出一些曲线, 使这些曲线上每一点的切线方向和该点的引力场强方向一致, 那么所有这样可以作出的曲线叫做引力线。

引力线数密度: 在引力场中任一点取一小面元 ΔS 与该点的场强方向垂直, 设穿过 ΔS 的引力线有 ΔN 根, 则比值 $\Delta N/\Delta S$ 叫做该点的引力线数密度, 它的意义是通过该点单位垂直截面的引力线根数, 规定引力场场强 $E \propto \Delta N/\Delta S$ 。

引力线性质: 引力线其自无穷远点, 止与该质点, 引力线在宇宙中处处存在. 一个质点的任何两条引力线不会相交, 不形成闭合线。

引力通量: 通过一面元 ΔS 的引力通量为该点场强的大小 E 与 ΔS 在垂直于场强方向的投影面积 Δ

$S' = \Delta S \cos \theta$ 的乘积。

二、通过一个任意闭合曲面 S 的引力通量 $\Phi = 4\pi G \Sigma m$, 与闭合曲面外的引力质量无关。

证明: (1) 通过包括质点 m 的同心球面的引力通量都等于 $4\pi Gm$ 。

以质点 m 所在处为中心以任意半径 r 作一球面. 根据万有引力定律, 在球面上各点场强大小一样 $E = Gm/r^2$, 场强的方向沿半径向外呈辐射状. 在球面上任意取一面元 dS , 其外法线向量 n 也是沿着半径方向向外的, 即 n 和 E 间夹角 $\theta = 0$, 所以通过 dS 的引力通量为 $d\Phi = E \cos \theta dS = EdS = Gm/r^2 dS$,

通过整个闭合球面的引力通量为 $\Phi = \oint Gm/r^2 dS = Gm/r^2 \times 4\pi r^2 = 4\pi Gm$ 。

(2) 通过包围质点的任意闭合曲面 S 的引力通量都等于 $4\pi Gm$

在闭合面 S 内以质点 m 所在处 O 为中心作一任意半径的球面 S' , 根据 (1) 通过此球面的引力通量等于 $4\pi Gm$. 由于引力场分布的球对称性, 这引力通量均匀地分布在 4π 球面度的立体角内, 因此在每个元立体角 $d\Omega$ 内的引力通量是 $Gm d\Omega$. 如果把这个立体角的锥面延长, 使它在闭合面 S 上截出一个面元 dS . 设 dS 到质点 m 的距离为 r , dS 的法线 n 与场强 E 的夹角为 θ , 则通过 dS 的引力通量 $d\Phi = E \cos \theta dS = Gm/r^2 \cos \theta dS$, $\cos \theta dS = dS'$ 是 dS 在垂直于场强方向的投影面积, 所以 $d\Phi = EdS' = Gm$

$\int r^2 dS = Gm d\Omega$. 所以通过面元 dS 的引力通量和通过球面 S 上与 dS 对应的面元 dS' 的引力通量相等, 所以通过整个闭合面 S 的引力通量都必定和通过球面 S 的引力通量一样, 等于 $4\pi Gm$.

(3) 通过不包括质点的任意闭合面 S 的引力通量恒为 0.

因为单个质点产生的引力线是辐向的直线, 它们在空间连续不断. 当质点在闭合面 S 之外时, 从某个面元 dS 上进入闭合面的引力线必然从另外一个面元 dS' 上穿出, 而这一对面元 dS 和 dS' 对质点所张的立体角相等, 通过 dS 的引力通量和通出 dS' 的引力通量的代数和为 0, 通过整个闭合面 S 的引力通量是通过这样一对对面元的引力通量之和, 当然也是等于 0 的.

(4) 多个质点的引力通量等于它们单独存在时的引力通量的代数和.

设物体有 $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ 个质点, 其中第 1 到第 n 个被高斯面 S 所包围, 第 $n+1$ 到第 k 个在高斯面之外, 则 k 个质点同时存在时通过 S 的引力通量为 $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_n + \Phi_{n+1} + \dots + \Phi_k = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_n = 4\pi G(m_1 + m_2 + \dots + m_n) = 4\pi G\Sigma m$. 证毕.

三、引力场中的高斯定理的应用

下面的结论由容晓晖推导得出

$$(1). \text{ 单个质点: } g = \frac{1}{4\pi g_0} \frac{m}{r^2}; (2).$$

均匀质量球壳: 当 $r < R$ 时, $g = 0$, 当 $r > R$

$$\text{时, } g = \frac{1}{4\pi g_0} \frac{m}{r^2} \text{ (相当于质量集中在球壳中心)}$$

(3). 均匀质量的实心球体: 当 $r < R$ 时,

$$g = \frac{1}{4\pi g_0} \frac{m}{R^3} r, \quad \text{当 } r > R \text{ 时, } g = \frac{1}{4\pi g_0} \frac{m}{r^2}$$

(相当于质量集中在球体中心);

$$(4). \text{ 无限长的棒: } g = \frac{1}{2\pi g_0} \frac{\lambda}{r} \text{ (}\lambda\text{ 表示质量的线密度); (5). 无限大的平面 (一个):}$$

$$g = \frac{\sigma}{2g_0}$$

(6). 两个无限大的平行平面: 两板之

$$\text{间 } g = 0, \quad \text{两板之外 } g = \frac{\sigma}{g_0} \text{ (}\sigma\text{ 表示质量的面密度)}$$

求万有引力场中的引力位, 或引力位差 (万有引力的位, 或称为重力势能位)

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi g_0} \frac{m}{r} \text{ (无限远为零势能点)}$$

1. 单个质点:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi g_0} \frac{m}{R}$$

2. 均匀质量球壳: 当 $r < R$ 时, (无限远为零势能点), 当 $r > R$ 时,

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi g_0} \frac{m}{r} \text{ (无限远为零势能点)}$$

3. 均匀质量的实心球体: 当 $r < R$ 时,

$$\varphi = \frac{1}{8\pi g_0} \frac{m}{R^3} (r^2 - R^2) - \frac{1}{4\pi g_0} \frac{m}{R}, \text{ 当 } r > R$$

$$\text{时, } \varphi = -\frac{1}{4\pi g_0} \frac{m}{r} \text{ (无限远为零势能点)}$$

$$\varphi_{12} = \frac{\lambda}{2\pi g_0} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

4. 无限长的棒: (λ 表示质量的线密度); 5. 无限大的平面 (一个):

$$\varphi_{12} = \frac{\sigma}{2g_0} (r_1 - r_2)$$

6. 两个无限大的平行平面: 两板之间

$$\varphi_{\text{内}2} = \frac{\sigma}{g_0} r_2 \text{ (两板之间为零势能点), 两板}$$

$$\text{两(外)边 } \varphi_{12} = \frac{\sigma}{g_0} (r_1 - r_2) \text{ (}\sigma\text{ 表示质量的面密度)}$$

笔者认为类似于静电场, 在引力场中也可以建立安培环路积分定理, 在此从略.